

Verhältnis von der Breite und Höhe des Läufers für das erfolgreiche Laufen

Teil der GYPT Aufgabe 03

KURT THEODOR STILLER, YUZHOU SHI

22. Dezember 2023

1 Fachliche Kurzfassung

In diesem Artikel wird ein starres Modell eines Rampenläufers mit vier Beinen vorgestellt, das eine unwegsame Rampe hinunterlaufen kann. Parameter, die das Laufverhalten beeinflussen, sind unter anderem die Höhe und die Breite des Läufers. Es wird gezeigt, dass es eine kritische Ungleichung gibt, die diese Parameter erfüllen müssen, damit der Läufer laufen kann. Diese Ungleichung wird sowohl theoretisch als auch experimentell abgeleitet und bestätigt. In der Theorie wird mit Hilfe von Kräften und Drehmomenten argumentiert und anschließend mithilfe von Python für sehr viele Breiten w funktionierende Höhen h berechnet und visuell in Form eines Diagramms ausgegeben. Der experimentelle Ansatz basiert hingegen darin, für viele Breiten w durch Probieren maximal und minimal Höhen h zu finden.

2 Motivation

Die Erforschung von Rampen Läufern hat sowohl wissenschaftliche als auch praktische Bedeutung. Wissenschaftlich gesehen sind Rampenläufer interessante Systeme, die nur mithilfe von potentieller Energiezufuhr Bewegung erzeugen können. Praktisch gesehen können Rampenläufer als Inspiration für die Entwicklung von energieeffizienten Robotern dienen, die sich in unwegsamem Gelände fortbewegen können.

3 Fragestellung

Die Aufgabe stammt vom GYPT mit folgender Originalversion: Construct a rigid ramp walker with four legs (e.g. in the form of a ladder). The construction may begin to ‘walk’ down a rough ramp. Investigate how the geometry of the walker and relevant parameters affect its terminal velocity of walking.

Übersetzung: Konstruieren Sie einen starren Rampenläufer mit vier Beinen (z. B. in Form einer Leiter). Die Konstruktion soll beginnen, eine unwegsame Rampe hinunter zu ”laufen”. Untersuchen Sie, wie sich die Geometrie des Rampenläufer und die relevanten Parameter auf die Endgeschwindigkeit des Rampenläufers auswirken.

Die zentrale Frage, die in diesem Artikel untersucht wird, ist: Bei welchem Verhältnis der Parameter Höhe und Breite des Läufers ist das Laufen möglich? Diese Frage ist wichtig, weil sie die grundlegende Bedingung für das Ermitteln der Endgeschwindigkeit ist. Um diese Frage zu beantworten, werden sowohl theoretische als auch experimentelle Methoden angewendet.

4 Theorie

Die Bewegung des Läufer besteht aus einer Vorwärtsbewegung (der Läufer lehnt sich nach vorne) und einer Rotationsbewegung.¹ Die folgenden Abbildungen zeigen alle später genutzten Variablen.

¹Bilder vom Bewegungsablauf des Läufer sind im Anhang zu finden

4.1 Vorwärtsbewegung

(Siehe Abbildung 1 und Abbildung 2)

Damit der Läufer aufhört sich nach vorne zu lehnen muss ein Kräftegleichgewicht zwischen den zur Rampe parallel wirkenden Kräften herrschen.

Um überhaupt mit diesem Laufen zu beginnen müssen seine vorderen Beine äbknicken und nicht rutschen. Somit bleiben die "Füße" (Kontaktpunkte zum Boden) an der gleichen Stelle. Gleichzeitig müssen die hinteren Beine über die Rampe gezogen werden, wodurch eine Widerstandskraft der Gleitreibung F_R entsteht. Diese ist das Produkt der Normalkraft und des Reibungskoeffizient r , welcher Experimentell bestimmt wurde.

Durch das Äbknicken der Beine wird die Feder verkürzt und somit entsteht eine Federkraft, die beide Endpunkte der Feder "nach außen drückt". Da jedoch der eine mit dem Bein an dem Fuß verbunden ist, kann dieser nicht "nach außen gedrückt" werden, da sonst sich der Fuß bewegen müsste. Somit wirkt die Federkraft nur in eine Richtung mit dem Winkel δ zur Rampe. Somit gilt für die entstehende Kraft F_{SX} nach der Formel für die Federkraft ($k \cdot (s_0 - s_1)$):

$$F_{SX} = k \cdot (s_0 - s_1) \cdot \cos \delta \quad (1)$$

Die Gewichtskraft F_G kann in eine Kraft F_{GX} parallel zur Rampe geteilt werden. Für diese gilt:

$$F_{FX} = F_G \cdot \cos 90 - \lambda = F_G \cdot \sin \lambda \quad (2)$$

Wenn der Läufer sich also nicht mehr nach vorne bewegt, gilt ein Kräftegleichgewicht:

$$0 = -F_R - F_{SX} + F_{FX} \quad (3)$$

δ kann mithilfe des Sinus- und Kosinussatzes in Abhängigkeit von den Längen b, c und des Winkels β_1 wie folgt berechnet werden:

$$\delta = \beta_1 + \pi/2 - \arctan\left(\frac{l}{h}\right) - \arcsin\left(\frac{\sin(\beta_1 - \arctan\frac{h}{b})}{\sqrt{2h^2 + l^2 - 2 \cdot h \cdot \sqrt{l^2 + h^2} \cdot \cos(\beta_1 - \arctan\frac{h}{l})}} \cdot h\right) \quad (4)$$

Aus (1), (2), (3) und da

$$s_1 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos \beta_1}$$

folgt:

$$0 = -F_R - F_{SX} + F_{FX} = -F_R -$$

$$k \cdot \left(s_0 - \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos \beta_1}\right) \cdot \cos\left(\beta_1 + \pi/2 - \arctan\left(\frac{l}{h}\right) - \arcsin\left(\frac{\sin(\beta_1 - \arctan\frac{h}{b})}{\sqrt{2h^2 + l^2 - 2 \cdot c \cdot \sqrt{l^2 + h^2} \cdot \cos(\beta_1 - \arctan\frac{h}{l})}} \cdot h\right)\right) +$$

$$F_G \cdot \sin \lambda \quad (5)$$

Da in (5) nur β_1 unbekannt ist, kann dieses bestimmt werden. (Wurde mithilfe von Python errechnet, indem für sehr viel Werte von β_1 die Gleichung getestet wurde und der Wert für β_1 gewählt wurde bei welchem die Gleichung erfüllt ist (bzw. sehr knapp nicht erreicht wurde)). Wenn der Winkel β_1 erreicht wird, so ist die Höhe h minimal. Diese Länge bezeichne ich als h_1 . Für h_1 gilt nach dem Sinus- und Kosinussatz und nach (4):

$$h_1 = \left(\frac{\sin(\beta_1 - \arctan\frac{h}{b})}{\sqrt{2h^2 + l^2 - 2 \cdot h \cdot \sqrt{l^2 + h^2} \cdot \cos(\beta_1 - \arctan\frac{h}{l})}} \cdot \sqrt{l^2 + h^2}\right) \cdot h \quad (6)$$

Da in (6) nichts unbekannt ist, kann h_1 bestimmt werden.

4.1.1 Weitere später benötigte Werte

Zunächst können durch h und h_1 die Werte für d_0, d_1, e_0 und e_1 bestimmt werden.

Nach dem Kosinussatz gilt für d_0 :

$$d_0 = \sqrt{\left(\frac{w}{2 \cos \alpha_1}\right)^2 + h^2 - \frac{w}{\cos \alpha_1} \cdot h \cdot \sin(\alpha_1)} \quad (7)$$

Analog gilt nach dem Kosinussatz für d_1 :

$$d_1 = \sqrt{\left(\frac{w}{2 \cos \alpha_1}\right)^2 + h^2 - \frac{w}{\cos \alpha_1} \cdot h \cdot \sin(\alpha_1)} \quad (8)$$

4.2 Rotationsbewegung

(Siehe Abbildung 3 und Abbildung 4)

Die Rotation ist senkrecht zur Rampe, sodass ich im Folgendem die Geometrie des Läufer auf eine Ebene senkrecht zur Rampe projiziere und mithilfe 2-Dimensionaler Geometrie die Drehmomente bestimme.

Zunächst teile ich die Rotationsbewegung in drei Teile mit jeweils Anfangs- und Enddrehmomenten. Diese wirken parallel zur Rampensteigung entlang der Achsen von zwei "hintereinander stehender" Füßen zweier Beine (siehe Bild) und werden durch die Projektion zu den zwei Drehpunkten A_0 und A_1 .

Die Teile sind die folgenden:

1. Teil: Der Drehpunkt wechselt von A_1 zu A_0 (bzw. anders herum)
2. Teil: Der Läufer rotiert entlang des Drehpunktes A_0 (bzw. A_1) bis die Rotation stoppt
3. Teil: Der Läufer rotiert entlang des Drehpunktes A_0 (bzw. A_1) zurück bis die anderen Füße auf die Rampe treffen

4.2.1 1. Teil

Das Anfangsdrehmoment dieses Teils bezeichne ich mit τ_0 . Für dieses Drehmoment mit der senkrecht wirkenden Kraft F gilt:

$$\tau_0 = F \cdot d_1 \Rightarrow F = \frac{\tau_0}{d_1} \quad (9)$$

Anschließend wird das Drehmoment auf A_0 übertragen wodurch für τ_1 (das Drehmoment nach dem 1. Teil) folgendes gilt:

$$\tau_1 = F \cdot d_0 \cdot \sin(90 - e_0 - e_1) = \frac{\tau_0}{d_1} \cdot d_0 \cdot \sin(90 - e_0 - e_1) \quad (10)$$

4.2.2 2. Teilrotation

Das Anfangsdrehmoment dieses Teils beträgt τ_1 und das Enddrehmoment (bzw. die Summe aller Drehmomente an diesem Punkt) beträgt 0, da sonst der Läufer nicht aufhören würde zu rotieren. Während dieses Teils wird durch die Krümmung des vorderen Beins h_0 zu h_1 verkleinert (per eigener Definition), da am Ende dieses Teils β_1 erreicht wird (siehe 2.1). Außerdem verkleinert sich e_0 auf e_2 (per eigener Definition).

Da am Ende dieses Teils das Drehmoment 0 beträgt, muss die Summe der Drehmomente der Gewichtskraft τ_1 betragen.

4.2.3 3. Teilrotation

Das Anfangsdrehmoment dieses Teils beträgt 0 und das Enddrehmoment (bzw. die Summe aller Drehmomente an diesem Punkt) bezeichne ich mit τ_2 .

Nur die Gewichtskraft verursacht ein Drehmoment. Diese ist abhängig vom Winkel e , der von e_2 zu e_1 verkleinert wird (per eigener Definition). Demnach gilt:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \int_{e_2}^{e_1} (F_G \cdot d_1 \cdot \sin(e) \, de) \\ &= F_G \cdot d_1 \cdot \int_{e_2}^{e_1} (\sin(e) \, de) \\ &= F_G \cdot d_1 \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_1)) \end{aligned} \quad (11)$$

Damit der Läufer nicht aufhört zu laufen, darf das Drehmoment nicht abnehmen und demnach muss folgendes gelten:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \tau_2 \\ &= F_G \cdot d_1 \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_1))\end{aligned}\quad (12)$$

s e_2 , die Unbekannte kann mithilfe von dem 2. Teil eingegrenzt werden (Umformungen analog zu (9)):

$$\begin{aligned}\int_{e_2}^{e_0} (F_G \cdot d_0 \cdot \sin(e) \, de) &> \tau_1 > \int_{e_2}^{e_0} (F_G \cdot d_1 \cdot \sin(e) \, de) \\ F_G \cdot d_0 \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_0)) &> \tau_1 > F_G \cdot d_1 \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_0))\end{aligned}\quad (13)$$

Aus (8) und (11) folgt:

$$F_G \cdot d_0 \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_0)) > \frac{\tau_0}{d_1} \cdot d_0 \cdot \sin(90 - e_0 - e_1) > F_G \cdot d_1 \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_0))\quad (14)$$

Aus (10) und (12) folgt:

$$\begin{aligned}F_G \cdot d_0 \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_0)) &> \frac{F_G \cdot d_1 \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_1))}{d_1} \cdot d_0 \cdot \sin(90 - e_0 - e_1) \\ &= F_G \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_1)) \cdot d_0 \cdot \cos(e_0 + e_1) \\ &> F_G \cdot d_1 \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_0)) \quad | /F_G/d_0 \\ \cos(e_2) - \cos(e_0) &> (\cos(e_2) - \cos(e_1)) \cdot \cos(e_0 + e_1) > \frac{d_1}{d_0} \cdot (\cos(e_2) - \cos(e_0))\end{aligned}\quad (15)$$

Aus (15) folgen die folgenden zwei Ungleichungen für $\cos(e_0)$:

$$\frac{\cos(e_0) - \cos(e_1) \cdot \cos(e_0 + e_1)}{1 - \cos(e_0 + e_1)} < \cos(e_2) < \frac{\cos(e_0) \cdot d_1 - d_0 \cdot \cos(e_1) \cdot \cos(e_0 + e_1)}{d_1 - d_0 \cdot \cos(e_0 + e_1)}\quad (16)$$

Diese Gleichung implementiere ich in Python für bestimmte Paare von w und h Werten, die in einem bestimmten Bereich liegen. Falls die obere Grenze kleiner als 0 oder die obere Grenze kleiner als die untere ist, so gilt das Paar nicht als "funktionierend" (der Läufer kann mit diesen Parametern nicht laufen). Die funktionierenden Paare wurden im unterem Diagramm mit grünen Punkten dargestellt: Die grünen Punkte können mit zwei linearen Funktionen, den Trendlinien der maximalen bzw. minimalen Werte von h , eingegrenzt werden. Somit gilt für mögliche Werte h_f und deren Breite w_f :

$$f_{min}(w_f) = w_f \cdot 0.507 < h_f < w_f \cdot 0.84 = f_{max}(w_f)\quad (17)$$

$$0.507 < \frac{h_f}{w_f} < 0.84\quad (18)$$

4.2.4 Anmerkung

Es sollte angemerkt werden, dass falls sogar h_f (17) erfüllt der Läufer nicht unbedingt auch funktionieren muss. Hingegen wenn mindestens eine der Ungleichungen nicht erfüllt ist, dann funktioniert der Läufer bestimmt nicht.

Weiter wurde die Luftwiderstandskraft und die Verschiebung des Massenschwerpunkt bei der Projektion auf die Ebene ignoriert. (Die "Plattform" des Läufers ist nicht parallel zur Rampe, jedoch wurde bei der Berechnung des Massenschwerpunkts dieser Aspekt vernachlässigt, da so nur ein sehr kleiner Fehler entsteht.)

Im Diagramm sind manche Stellen "leerer als andere. Dies liegt an den Rundungsfehlern beim Berechnen und daran dass diese Teilweise in der Trigonometrie mathematische Fehler herbeiführen können. Die mathematischen Fehler bzw. deren Paare werden nicht als Punkt abgebildet.

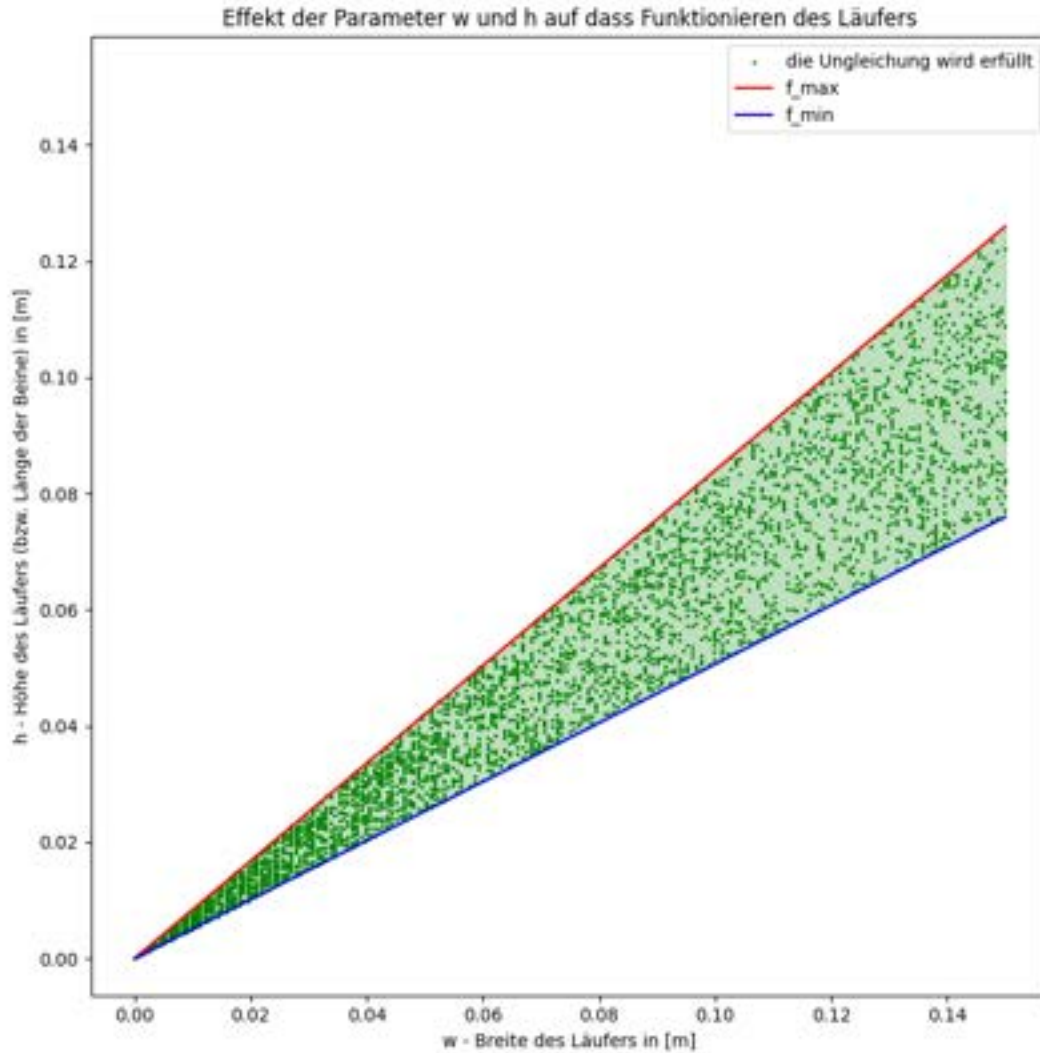


Abbildung 5: Seitenansicht de Läufers nach der Vorwärtsbewegung

5 Experiment

5.1 Materialien

Material: Für dieses Experiment wurden folgende Materialien genutzt:

- Eine Holzrampe mit einer rauen Oberfläche, die verhindert, dass der Läufer abrutscht, und einem Steigungswinkel von 20°
- Ein Handy (und Computer mit Tracker Software)
- Ein Stativ, um das Handy stabil zu halten
- Ein Läufer aus Lego, dessen Breite w und Höhe h man variieren kann

5.2 Vorgehensweise und Methoden

Die Methode dieses Experiments besteht aus folgenden Schritten:

- 1 Man wähle beliebige verschiedene Werte für die Breite w des Läufers aus, in unserem Fall die Werte, die zwischen 4 cm und 15 cm (5cm, 6cm, 7cm, ... ,14cm) liegen.



Abbildung 6: Experimentaufbau



Abbildung 7: Nahansicht des Läufers

- 2 Für jeden Wert von w wird ein minimales h und ein maximales h gesucht, bei denen ein Läufer über eine Rampe laufen kann, ohne anzuhalten oder umzufallen. Die Werte werden vom niedrigsten zum höchsten getestet, indem der Läufer auf die entsprechende Höhe (bzw. Länge der Beine) eingestellt und auf die Rampe gestellt wird. Anschließend wird er rotiert und losgelassen, wodurch er zurückrotiert und der Lauf beginnt. Wenn dieser Lauf nicht aufhört, ist h ein gültiger Wert. Die Stellen, an denen der Läufer anfängt oder aufhört zu laufen, werden genauer untersucht und dort werden mehr Versuche durchgeführt, um das Minimum und Maximum von h so genau wie möglich zu bestimmen.
- 3 Für die zwei gefundenen Werte für h , wird der Läufer mit einem Handy (Kamera) aufgenommen und die Geschwindigkeit getrackt. Wenn die Geschwindigkeit konstant ist (bzw. ein wiederholendes konstantes Muster hat), kann sichergestellt werden, dass der Läufer für diese Höhe nicht aufhört zu laufen².
- 4 Die Schritte 2 bis 3 werden für alle Werte von w wiederholt und die minimalen und maximalen Werte für h , die einen nicht aufhörenden Lauf ermöglichen, werden notiert.

6 Ergebnisse

Die erhaltenen Werte für die minimalen und maximalen Höhen wurden im Diagramm (Abbildung 8) dargestellt. Anschließend erhalte ich durch die Trendlinie dieser Werte lineare Funktionen für die maximalen und minimalen Höhen h (Abbildung 9). (Da diese eine sehr kleine Abweichung zu den Werten haben, kann angenommen werden, dass die Werte linearen Funktionen folgen.) Diese lauten:

$$g_{min}(w_f) = w_f \cdot 0.531 < h_f < w_f \cdot 0.792 = g_{max}(w_f) \quad (19)$$

$$0.531 < \frac{h_f}{w_f} < 0.792 \quad (20)$$

7 Ergebnisdiskussion

Die Ergebnisse bzw. die Funktionen liegen „innerhalb“ der Funktionen aus (). Somit wird die Theorie bestätigt, da wenn h (20) erfüllt, es automatisch auch (18) erfüllt.

7.0.1 Fehlerbetrachtung

Es wird keine Fehlerrechnung durchgeführt, da der Läufer entweder läuft oder nicht. Bei der Messung werden also keine Fehler gemacht. Trotzdem sollte man sich den folgenden Fehlerquellen bewusst sein:

- 1 Der Aufbau des Läufers wurde vor allen Versuchen immer kontrolliert, ob alle Komponenten des Läufers, wie die Beine und die Füße, an der richtigen Stelle und stabil genug befestigt sind. Jedoch kann nicht verhindert werden, dass die einzelnen Komponenten während dem Hinunterlaufen der Rampe instabiler

²Bild vom Tracker Programm im Anhang

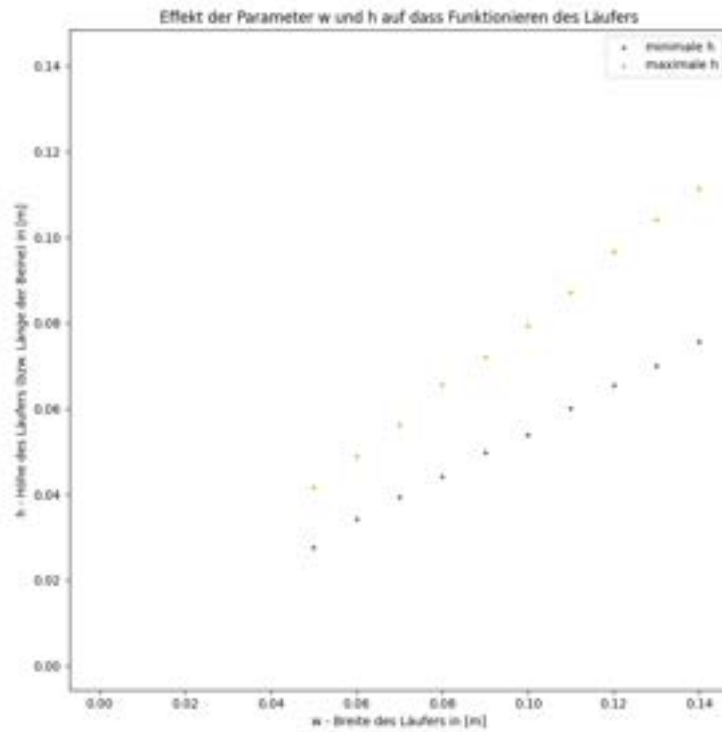


Abbildung 8: Frontalansicht des Läufers vor der Rotationsbewegung

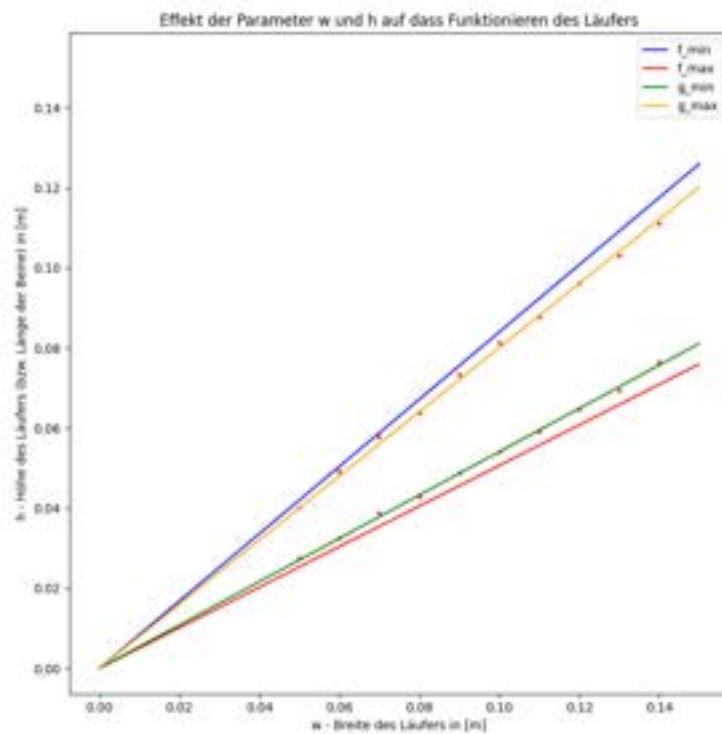


Abbildung 9: Frontalansicht des Läufers vor der Rotationsbewegung

werden. Die Wucht, die durch das seitliche Schaukeln auf der Rampe entsteht und auf die Beine wirkt, könnte die Legoteile von der Befestigung leicht lockern, welches Einfluss auf das Hinunterlaufen der Rampe und folglich auch auf die benötigten Messdaten hat.

- 2 Ebenfalls könnten die Schraubenfedern möglicherweise die vorderen Beine, aufgrund von zu großer Reibung in der Vogelfeder, nicht schnell genug nach vorne drücken. Dies kann dazu führen, dass das jeweilige vordere Bein nicht im zur Grundfläche neutralen 90° Winkel, wo die Federn maximal ausgedehnt sind, den nächsten Schritt macht, sondern schon früher, wenn das Bein einen kleineren Winkel von 90° hat. Dies hätte ebenso Auswirkungen auf das Hinunterlaufen der Rampe des Läufers und die zugehörigen Messdaten, da der Rhythmus der einzelnen Schritte beeinträchtigt wird.
- 3 Es kam auch vor, dass das Schaukeln des Läufers beim Hinunterlaufen der Rampe unregelmäßig war. Die Ursache davon ist, dass beim Start etwas zu stark angestupst wird. Dies ist jedoch schwierig zu vermeiden, denn jedes Mal wird unterschiedlich stark angestupst, auch wenn es nicht danach aussieht. Nach einigen Schritten, die der Läufer gemacht hat, gleicht sich der Rhythmus wieder aus, falls die geänderten Parameter den Läufer erlauben, laufen zu können.
- 4 Es kann auch dazu kommen, dass der Läufer aufgrund von ungleichmäßiger Rauheit auf der Rampe nicht läuft, sondern rutscht. Dies tritt aber nur in sehr kurzen Zeiträumen auf. In solchen Fällen lag es nicht an den ausgewählten Parametern, denn der Läufer war in der Lage, nach dem Rutschen weiterzulaufen.

Wie erwähnt sind diese Punkte der Fehlerbetrachtungen für unsere Problemfrage eher weniger relevant, da wir nur untersuchen, ob der Läufer mit bestimmten Parametern laufen kann oder nicht. Diese Fehlerbetrachtungen hätten einen Einfluss auf die Geschwindigkeit des Läufers, die er braucht, um die Rampe hinunter zu laufen.

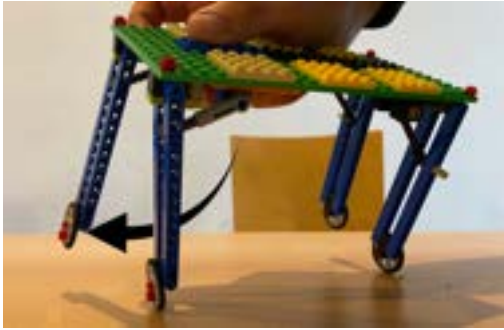
8 Fazit und Ausblick

Es wurde ein erforderliches Verhältnis der Höhe und Breite des Läufers über einen theoretischen und praktischen Weg bestimmt und nachgewiesen. Weiter ist die Theorie die Grundlage aller weiteren Berechnungen (auch der der Endgeschwindigkeit). Um sie zu vervollständigen, müsste man die Verformung der Feder in Relation zur Zeit bestimmen und anschließend daraus die Werte für β_1 und h_1 in Relation zur Zeit errechnen. Daraus könnte man anschließend τ_{u_1} bestimmen und demnach hätte man auch e_2 und somit alle benötigten werte für die Berechnung.

9 Anhang



Visuelle Auswertung der Geschwindigkeiten bei den Vermuteten Maximal bzw. Minimal Werten für h :



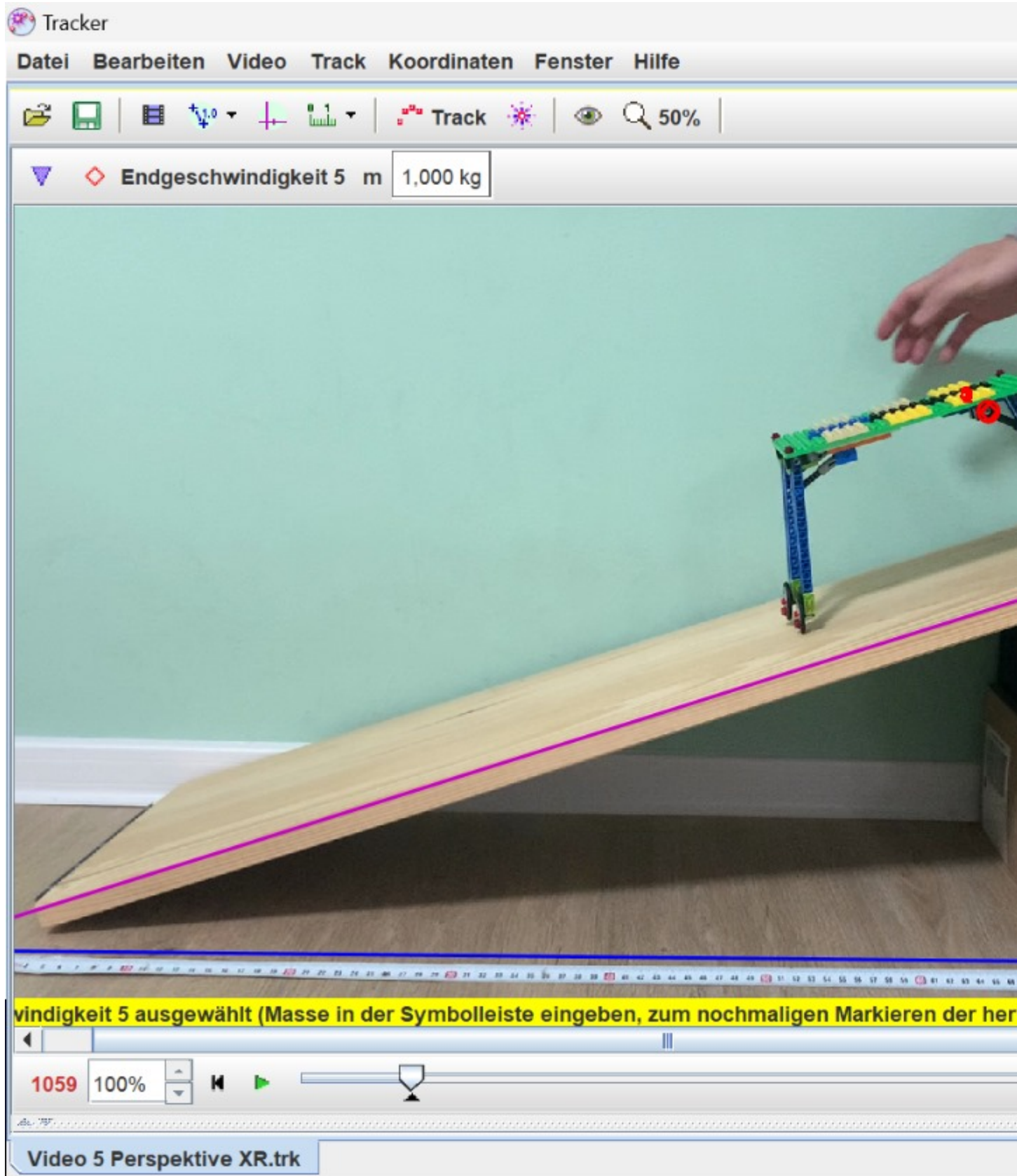


Abbildung 10: Tracker Programm