

KLAUSURERSATZLEISTUNG: PORTFOLIO zum
6. GYPT 2019

Problem 05: Filling up a bottle

TIMO HUBER

24. März 2019

Herder Gymnasium Berlin
Westendallee 45
14052 Berlin

Betreut von: C. URBANOWSKI (UR)

Zusammenfassung

Für das 6. Wettbewerbsjahr des GYPT 2018/19 lautete die Aufgabenstellung für Problem Nr. 05 „Filling up a bottle“ wie folgt:

„When a vertical water jet enters a bottle, sound may be produced, and, as the bottle is filled up, the properties of the sound change. Investigate how relevant parameters of the system such as speed and dimensions of the jet, size and shape of the bottle or water temperature affect the sound.“

Der sich verändernde Ton, der beim Befüllen einer Flasche mit einem vertikal einfallenden Wasserstrahl entsteht, soll also in Abhängigkeit relevanter Parameter untersucht werden. Wir haben ein mathematisches Modell zur Berechnung des Frequenzverlaufs für jede beliebige Flasche erstellt, welches eine gute Beschreibung der experimentell erhobenen Daten darstellt. Auch haben wir eine plausible Erklärung für unterschiedlich laute Frequenzbänder gefunden und das Projekt im März 2019 sehr erfolgreich beim GYPT vorgestellt.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	1
1.1	Projektfindung	1
1.2	Parameter	1
1.3	Flaschenmodellierung	1
1.4	Messaufbau (1)	2
1.5	Datenauswertungsverfahren	2
1.5.1	Audiodaten	2
1.5.2	Videodaten	3
2	Erschließen des Phänomens	3
2.1	Stehende Wellen	3
2.2	Änderung der Wasserhöhe	3
2.3	Tonerzeugung durch Blasen	4
2.3.1	PLATEAU-RAYLEIGH-Instabilität	4
2.3.2	Wie kommen die Luftblasen unter die Wasseroberfläche?	4
2.3.3	Blasenoszillation	5
2.4	Erste Zusammenfassung	6
3	Präzisere Modellierung: Helmholtz-Resonator	6
3.1	Messaufbau (2)	6
3.2	Messdaten	7
3.3	Modellerweiterung: Helmholtz-Resonator	7
3.4	Grenze zwischen Flaschenbauch und -hals	8
4	Zusammenfassung	8
5	Nachwort	9
	Literatur und Referenzen	9
6	Reflexion	10

Das Projekt wurde gemeinsam mit Anton Schaedla vom Paulsen Gymnasium Berlin erarbeitet.

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzungen, Symbole und Zeichen die im Dokument verwendet werden:

h_A Höhe des Wasserauslasses über dem Flaschenboden

h_B Höhe des Behälters

r_B Radius des Behälters

h_W Höhe der Wasseroberfläche über dem Flaschenboden

h_L Höhe der Luftsäule zwischen Wasseroberfläche und oberem Flaschenende

h_F Fallhöhe des Wasserstrahls von Auslass zu Wasseroberfläche

Q Volumenstrom

d_A Durchmesser des Wasserauslasses

v_A Mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wasserstrahls am Wasserauslass

ρ_W Dichte des Wassers

σ_W Oberflächenspannung des Wassers

η_W Dynamische Viskosität des Wassers

ϑ_W Wassertemperatur

p_L Luftdruck

κ_L Adiabatenexponent der Luft ≈ 1.4

c_L Schallgeschwindigkeit in Luft

ϑ_L Lufttemperatur

g Gravitationsbeschleunigung $\approx 9.81 \frac{m}{s^2}$

f Frequenz

$Amp.$ Amplitude

λ_0 Wellenlänge der Grundfrequenz ($n = 0$)

m_{WiB} Masse des Wassers im Behälter

$v_{Fall}(z)$ Fallgeschwindigkeit v_{Fall} in Abhängigkeit von dem zurückgelegten Fallweg z

h_{PR} Höhe, in der die PLATEAU-RAYLEIGH-Instabilitätauftritt

f_M Minnaert-Frequenz

f_H Helmholtz-Frequenz

Neben den hier genannten sind alle sonst gängigen Abkürzungen, Symbole und Zeichen gültig.

1 Grundlegendes

1.1 Projektfindung

Anton und ich hatten uns schon in den Sommerferien geeinigt, dass wir in diesem Schuljahr erneut ein Projekt gemeinsam bearbeiten wollten. Am Donnerstag, dem 23.8.2018, fand die erste Sitzung des Physik Zusatzkurses in meinem (wahrscheinlich) letzten Schuljahr statt. Anton war in dieser Stunde nicht anwesend, also habe ich mich im Alleingang für ein Projekt [3] entschieden:

Projekt 10: „Suspended Water Wheel“ war zunächst ansprechend, da ich vor kurzen ein Youtube-Video von VERITASIVM [7] gesehen habe, in dem das zu untersuchende Phänomen vorgestellt wurde. Jedoch hatten Anton und ich uns im letzten Jahr schon intensiv mit Kräften, die auf rotierende Körper wirken, beschäftigt [5], und um eine neue Herausforderung zu haben, haben wir uns gegen das Projekt entschieden. Projekt 14: „Looping Pendulum“ schien auch sehr interessant zu sein, jedoch schien es umso zeitaufwändiger. Da ein Großteil der Experimentierzeit während der Klausurenphase im 4. Semester liegen würde, haben wir uns gegen das Projekt entschieden. Projekt 05: „Filling Up a Bottle“ schien uns für diese Voraussetzungen am besten geeignet. Das zu entwickelnde Modell schien nicht allzu komplex, zudem sind Anton und ich schon erfahren in Fluiddynamik.

„When a vertical water jet enters a bottle, sound may be produced, and, as the bottle is filled up, the properties of the sound change.

Investigate how relevant parameters of the system such as speed and dimensions of the jet, size and shape of the bottle or water temperature affect the sound.

Investigate how relevant parameters of the system [...] affect the sound.“

Der sich verändernde Ton, der beim Befüllen einer Flasche mit einem vertikal einfallenden Wasserstrahl entsteht, soll also in Abhängigkeit relevanter Parameter untersucht werden.

1.2 Parameter

Um das zu untersuchende System vollständig zu beschreiben, sind einige Parameter notwendig. All diese Parameter müssen nach Möglichkeit experimentell untersucht oder berechnet werden können: Neben der Form der Flasche (Öffnungsradius und -form, Flaschenform und -dimensionen) sind Geschwindigkeit und Querschnittsfläche des Wasserstrahls am Wasserauslass und der Abstand zwischen Flasche und Wasserauslass entscheidend. Laut Aufgabenstellung soll zudem der Einfluss Wassertemperatur untersucht werden, welche dann Eigenschaften von Wasser und Luft verändern könnte (z. B. Wasserdichte, -oberflächenspannung und -viskosität). Da die Wassertemperatur die Luft in der Flasche und um den Aufbau herum beeinflusst, verändern sich bei unterschiedlichen Lufttemperaturen ebenfalls Eigenschaften wie Schallgeschwindigkeit c_L und Druck p_L . Der Adiabatenexponent der Luft κ_L verändert sich zwar auch bei höheren Temperaturen, jedoch bei Veränderungen ± 100 Kelvin nicht signifikant [9].

Da in der Aufgabenstellung nach der Änderung des Tons gefragt wird, welcher offensichtlich durch die sich ändernde Füllhöhe h_W zustande kommt, ist diese ebenfalls von Bedeutung.

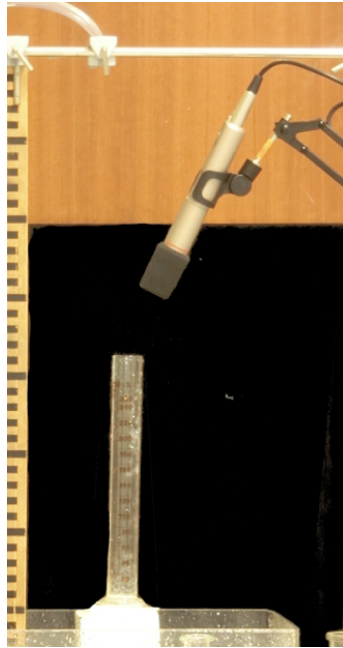
1.3 Flaschenmodellierung

Um die Füllhöhe zu jedem Zeitpunkt bestimmen zu können, müssen die verwendeten Flaschen durchsichtig sein. Wir einigten uns zunächst auf eine Definition des Wortes „Flasche“: Eine Flasche ist ein einseitig geöffneter, runder Körper, welcher auf jeder horizontalen Ebene eine runde Querschnittsflächenaufweist und sich so als Rotationskörper darstellen lässt. Der Einfachheit halber haben wir vorerst unsere Messungen an zylindrischen Flaschen durchgeführt, da bei diesen bei konstantem Volumenstrom Q die erste Ableitung nach der Zeit (oder Änderung) der Wasserhöhe h_W konstant ist. Später soll dieses Modell jedoch näher an die Realität angeglichen werden.

1.4 Messaufbau (1)

Die Aufgabenstellung verlangt nach der Untersuchung der entstehenden Töne. Um möglichst gute, störungsfreie Messdaten zu erhalten, muss die Messung in einem möglichst leisen, hallfreiem Raum stattfinden. Zudem ist es sinnvoll, die Experimente zu filmen, um die Wasserhöhe in Abhängigkeit der Zeit bestimmen zu können.

Ein Druckregler hätte zwar unseren finanziellen Rahmen gesprengt, um trotzdem für einen konstanten Volumenstrom während den Messungen zu sorgen, haben wir Wasser aus einem vom Wasserhahn zum Überlaufen gebrachten Container mit einer Teichpumpe durch einen Schlauch in eine Düse über



den aufzufüllenden Behälter gepumpt. Mit einem Mikrofonständer wurde ein Messmikrofon von oben auf die Behälteröffnung gerichtet und eine Kamera auf einem Stativ hat mit einem Zoomobjektiv aus einer Entfernung von etwa 5m den Behälter gefilmt, um Verzerrungen zu vermeiden. Der Aufbau steht in einer großen Glaswanne, um eventuell überlaufendes Wasser aufzufangen. Der Aufbau ist modular und zahlreiche Parameter (h_F , d_A , v_A , Q , ϑ_W , Form und Dimensionen der Flasche) können ohne größere Umstände verändert werden.

Wir wollten zuerst das Experiment in einer dreieckigen Schallschutzkammer mit Dämmmaterial durchführen, jedoch haben wir uns aus Zeitgründen dagegen entschieden und uns immer einen ruhigen Platz neben dem Waschbecken in der Physiksammlung gesucht.

1.5 Datenauswertungsverfahren

Zu jedem Experiment und Durchgang gibt es einen Eintrag in einer Datenbank mit Datum, Behälterdimensionen, Höhe des Auslasses über dem Flaschenboden und Volumenstrom. Es wurden Video- und Tondaten während den Experimenten aufgenommen. Wir hatten für die Quantifizierung des Volumenstroms Q kein Messgerät, da aber $Q = \frac{V}{t}$ gilt, und das Wasservolumen im Behälter über die Behälterdimensionen und die Wasserhöhe h_W leicht berechenbar ist, kann aus den Videodaten der Volumenstrom ermittelt werden.

1.5.1 Audiodaten

Die Frequenzspektren der aufgezeichneten Audiosignale werden mit einer Fast-Fourier-Transformation (FFT) analysiert. Das Programm VoceVista Video, dessen Testversion jedoch leider nur für 30 Tage gültig ist, visualisiert dies sehr anschaulich.

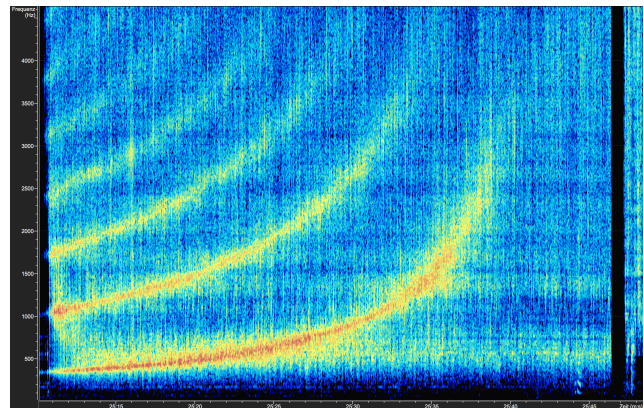


Abbildung 2: Spektrogramm: Dreidimensionales Diagramm: x: t | y: f | z(Farbe): Amp .

Das Programm Audacity ist auch in der Lage ein Frequenzspektrum (Amplitude in Abhängigkeit von Frequenz) für einen bestimmten Zeitraum zu “zeichnen”, und sogar als CSV zu exportieren, jedoch sind Spektrogramme in Abhängigkeit der Zeit mit Audacity nicht so gut möglich. Es gibt zwar die Möglichkeit, eine Audiospur nicht als Wellenform sondern als Spektrogramm anzuzeigen, diese sind aber bei weitem nicht so präzise.

1.5.2 Videodaten

Um Messdaten für $h_W(t)$ zu erheben, haben wir die Software VianaNET verwendet. Da sich beim Befüllen des Behälters Blasen an der Oberfläche gebildet haben, ist h_W nur bedingt genau bestimmbar.

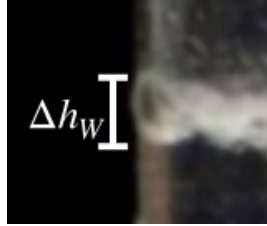


Abbildung 3: Δh_W

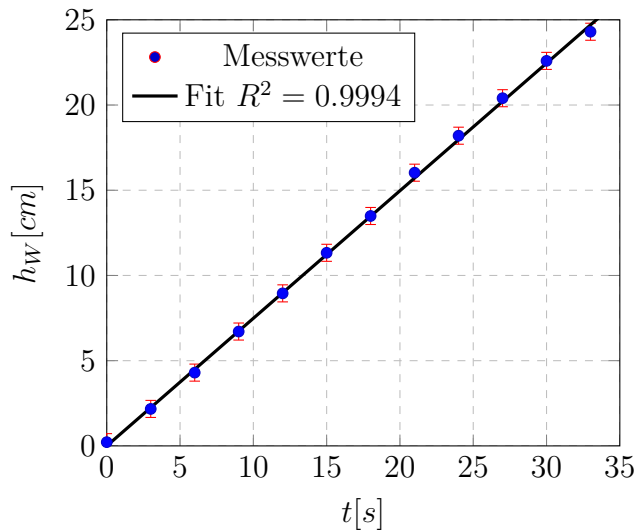


Abbildung 4: Beispielmessung: $h_w(t)$ mit einem zylindrischen Behälter und $Q = \text{const.}$

Aus dieser Messung und den Gefäßdimensionen (Zylinderradius: 2cm lässt sich, wie anfangs erwähnt, der Volumenstrom Q berechnen:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{V}{t} = \frac{\pi r^2 h_W}{t} \\ &= \frac{\pi (0.02\text{m})^2 \cdot 0.2\text{m} \pm 0.005\text{m}}{26.7\text{s}} \\ &\approx 9.413 \frac{\text{ml}}{\text{s}} \pm 0.3 \frac{\text{ml}}{\text{s}} \end{aligned}$$

2 Erschließen des Phänomens

Wir haben das Phänomen systematisch in verschiedene Teilabschnitte unterteilt, denn es treten während des Experiments unterschiedliche

Effekte auf. Im nun folgenden Abschnitt werden diese einzelnen Phänomene und Effekte in der Reihenfolge, in der wir sie untersucht haben, dargestellt.

2.1 Stehende Wellen

Nachdem wir einige Experimente durchgeführt haben, war uns am Donnerstag dem 30.8.2018 klar, dass die Änderung des Tons beim Befüllen der Flasche mit der Wasserhöhe zusammenhängt. In der Luftsäule zwischen Ende der Flasche und Wasseroberfläche mit der Länge $h_L = h_B - h_W$, welche sich mit der Zeit ändert, entstehen stehende Wellen. An der Flaschenöffnung befindet sich ein „offenes Ende“ und an der Wasseroberfläche ein „geschlossenes Ende“.

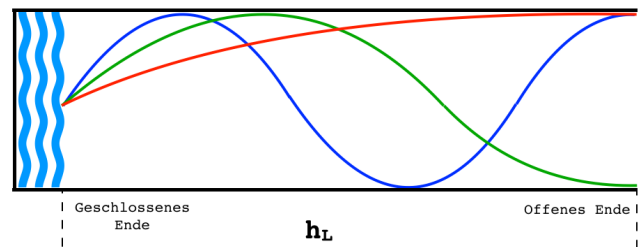


Abbildung 5: Visualisierung der stehenden Wellen im Zylinder (Luftschnele): Grundton: Rot, 1. Oberton: Grün, 2. Oberton: Blau

Die Frequenzen der stehenden Wellen lassen sich über zwei Formeln berechnen:

$$\lambda_n = \frac{4h_L}{2n+1} \quad f_n = \frac{c}{\lambda_n}$$

woraus folgt:

$$f_n = \frac{(2n+1) \cdot c}{4h_L} \quad (1)$$

2.2 Änderung der Wasserhöhe

Da sich die Wasserhöhe mit der Zeit abhängig von der Flaschenform ändert, ist hierzu eine genauere Beschreibung notwendig. Diese erfordert Differentialrechnung, weswegen wir bis etwa Dezember fast ausschließlich mit einer sinnvollen Herleitung verbracht haben.

Nimmt man den Behälter als Rotationskörper an, so lässt sich der Behälterradius r_B in Abhängigkeit zur Behälterhöhe z als eine Funktion $r_B(z)$ darstellen. Da der Volumenstrom Q konstant ist, ist die Änderung der Wassermasse im Behälter \dot{m}_{WiB} ebenfalls konstant.

m_{WiB} lässt sich in Abhängigkeit der Wasserhöhe beschreiben:

$$m_{\text{WiB}} = \rho\pi \int_0^{h_w(t)} r_B^2(z) dz$$

So lässt sich die Wasserhöhe in Abhängigkeit der Zeit bestimmen, indem man (2) für $h_w(t)$ löst:

$$\rho\pi \frac{d}{dt} \int_0^{h_w(t)} r_B^2(z) dz = \dot{m}_{\text{WiB}} \quad (2)$$

Setzt man die Lösung von (2) in (1) ein und wendet dies auf die Beispielmessung, welche in den Abbildungen 2 und 4 gezeigt wurden, an, so stimmt das theoretische Modell mit der Praxis sehr gut überein. Dies gilt auch für alle anderen Messungen, die wir vorgenommen haben (unterschiedliche Zylinder, Fallhöhen und Volumenströme).

2.3 Tonerzeugung durch Blasen

Während unserer Messungen haben wir bemerkt, dass nur dann ein Ton hörbar bzw. erzeugt wird, wenn sich viele Blasen im Wasser befinden.

Trifft ein Wasserstrahl, der sich zu Tropfen gebildet hat, auf eine Wasseroberfläche, bilden sich zahlreiche Luftblasen unter der Wasseroberfläche. Trifft hingegen ein laminarer Wasserstrahl auf die Wasseroberfläche, bilden sich verhältnismäßig wenig bis gar keine Blasen unter der Wasseroberfläche.

2.3.1 Plateau-Rayleigh-Instabilität

Ein Wasserstrahl mit gegebenen Initialradius am Wasserauslass fällt senkrecht nach unten. Durch die konstante Gravitationsbeschleunigung g steigt die Fallgeschwindigkeit v_{Fall} . Da $Q = v_{\text{Fall}} \cdot \pi r_B^2(z) = \text{const.}$ gilt, wird der Radius mit zunehmendem Fallweg z geringer. Die

Strahllänge nimmt zu und erreicht einen kritischen Wert. Bei diesem kritischen Wert verliert der Strahl seine zylindrische Form, er teilt sich zu Tropfen auf. Dieses Phänomen tritt hauptsächlich als Folge der Oberflächenspannung σ_W auf.

Dieses Verhalten ist auf das Vorhandensein kleiner Störungen im Wasserstrahl zurückzuführen. Alle Wasserstrahlen weisen einige nicht zu vernachlässigende äußere Störungen auf, die in instabilen Systemen, wie z.B. einer Wasserleitung, exponentiell zunehmen können. Im Allgemeinen wird diese Verformung der Wassersäule, die als VARIKOSE-Störung bekannt ist, als eine Reihe von periodischen Sinusoiden dargestellt, wie in Abb. 6 erkennbar.

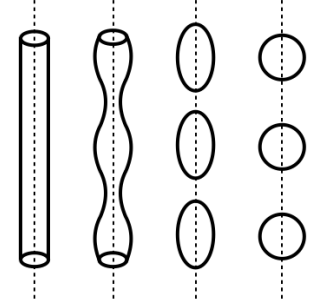


Abbildung 6: Schematische Darstellung der Aufteilung eines Wasserstrahls in Tropfen

JOSEPH PLATEAU charakterisierte diese Instabilität erstmals 1873 durch experimentelle Beobachtungen. Er stellte fest, dass die Instabilität auftrat, wenn die Wellenlänge den Säulendurchmesser um einen Faktor von etwa $3,13 \approx \pi$ überschritt. LORD RAYLEIGH bestätigte später PLATEAUS Arbeit und veröffentlichte eine analytische Erklärung dieser Beobachtung [1]. Die Tropfenbildung aus Wasserstrahlen ist also abhängig von minimalen Veränderungen im Strahl selbst. Die Höhe, bzw. der bis dahin zurückgelegte Fallweg, in der die PLATEAU-RAYLEIGH-Instabilität auftritt, ist für jedes unveränderte System konstant $h_{PR} = \text{const.}$

2.3.2 Wie kommen die Luftblasen unter die Wasseroberfläche?

Hierzu haben wir selbst wenige Experimente durchgeführt, da hierzu schon umfangreiche Forschungsarbeiten durchgeführt wurden. KEES VAN DEN DOEL erklärte den Einschluss der Blasen durch das Zusammenbrechen der

von dem Wassertropfen gebildeten Luftsäule. Die daraus folgende Einwärtsbewegung des Wassers schließt die Luft blasenförmig im Wasser ein [6].

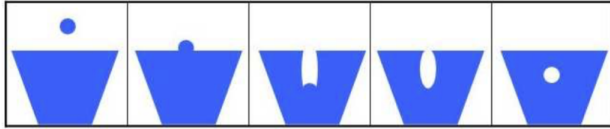


Abbildung 7: Schematische Darstellung eines Blaseneinschlusses durch einen Wassertropfen nach [6]

Nur wenn ein Wasserstrahl tropfenförmig auf die Wasseroberfläche auftrifft, werden Blasen unter die Wasseroberfläche befördert. Um also einen Ton zu hören, muss zu jedem Zeitpunkt gelten: $h_F > h_{PR}$.

Aber wie kommt es zu dieser Tonerzeugung?

2.3.3 Blasenoszillation

Die grundlegende Forschung zu diesem Thema wurde bereits 1933 von M. MINNAERT veröffentlicht [4]. Lediglich die Anwendung auf unser Beispiel haben wir selbst durchgeführt. Eine Luftblase unter Wasser oszilliert mit einer bestimmten Resonanzfrequenz, welche durch die MINNAERT-Frequenz f_M gegeben ist:

$$f_M = \frac{1}{2\pi r_{\text{Blase}}} \cdot \sqrt{\frac{3\gamma p_L}{\rho_W}} \quad (3)$$

Bei konstantem γ, p_L, ρ_W gilt:

$$f_M \propto \frac{1}{r_{\text{Blase}}} \quad (4)$$

Die erzeugten Töne hängen also direkt mit den Blasenradius r_{Blase} zusammen. Wir untersuchten also bei gegebenen Fallhöhen die Verteilung der Blasenradien unter der Wasseroberfläche. Für eine tiefere Untersuchung wie sich z.B. der Fallweg auf die Blasenradienverteilung auswirkt, hatten wir leider keine Zeit, jedoch hat J. BELDEN hierzu 2012 eine umfassende

Arbeit veröffentlicht [2], die für uns aber leider nicht nachvollziehbar war. Wir fotografieren also Blasen unter der Wasseroberfläche, die von einem Strahl mit einer Fallhöhe von 40cm erzeugt wurden.

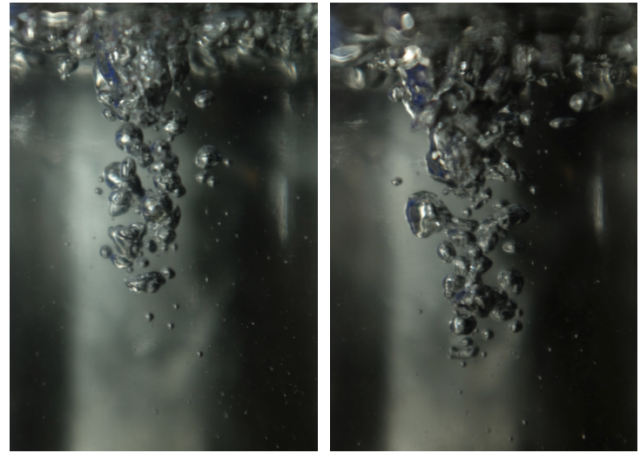


Abbildung 8: Ausgewertete Fotos von Blasen unter der Wasseroberfläche

Die Blasenradien reichten von 0.05mm bis 4.25mm und streuten um einen Mittelwert von 1.48mm mit einer Standardabweichung von 0.72mm:

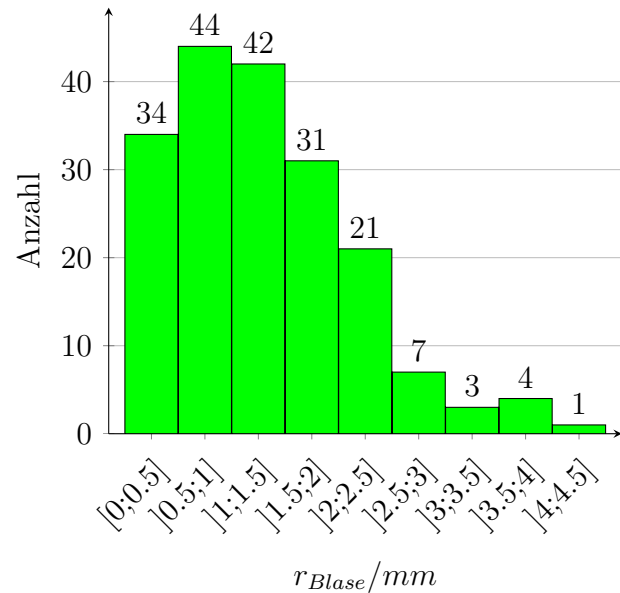


Abbildung 9: Verteilung der Blasenradien

Nach KEES VAN DEN DOEL ist die Amplitude der jeweiligen Blasenoszillationen proportional

zu $r_{\text{Blase}} \cdot \sqrt{r_{\text{Blase}}}$ [6]. Große Blasen haben demnach einen weit größeren Einfluss auf den Ton. Generiert man ein Spektrum der von den observierten Blasenradien ausgehenden Töne, so wird offensichtlich, dass die tieferen Töne viel lauter sind:

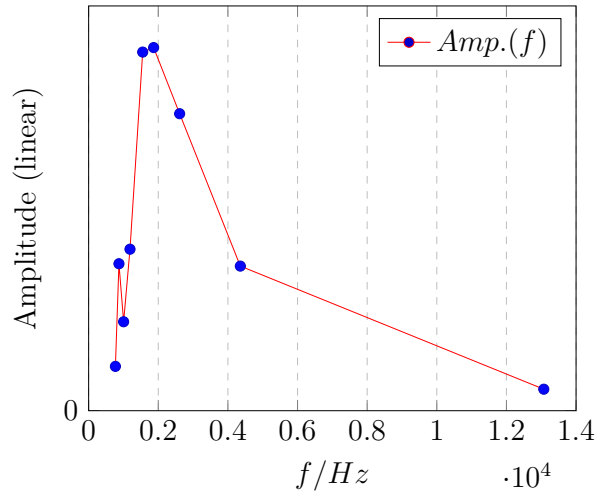


Abbildung 10: Amplituden der jeweiligen Minnaert-Frequenzen

Dies erklärt auch, dass die tieferen Frequenzen immer sehr viel lauter als die höheren waren (\rightarrow Abb. 2). Auch erklärt es, warum ganz am Anfang, wenn sich am Boden des Gefäßes noch ein runder Hydraulischer Sprung bildet, nur hohe Frequenzen hörbar sind. Zu diesem Zeitpunkt können sich aufgrund der zu niedrigen Wasserhöhe noch keine großen Blasen bilden, weswegen keine tiefen Frequenzen hörbar sind.

2.4 Erste Zusammenfassung

Nachdem sich der Wasserstrahl aufgrund der PLATEAU-RAYLEIGH-Instabilität (\rightarrow 2.3.1) zu Tropfen aufgespalten hat, trifft er auf die Wasseroberfläche und sorgt so für Blasen unter der Wasseroberfläche (\rightarrow 2.3.2), die je nach Radius mit der MINNAERT-Frequenz (\rightarrow 2.3.3) oszillieren. Stehende Wellen (\rightarrow 2.1) verstärken je nach Wasserhöhe und Luftsäulenlänge verschiedene Frequenzen. Die Wasserhöhenänderung kann je nach Flaschenform variieren und für jeden Zeitpunkt berechnet werden (\rightarrow 2.2).

3 Präzisere Modellierung: Helmholtz-Resonator

Das in Abschnitt 2 dargestellte Modell liefert zuverlässige Werte und beschreibt das auftretende Phänomen nahezu vollständig. Jedoch beruht es auf der in Abschnitt 1.3 formulierten Modellannahme, dass eine Flasche als Zylinder idealisiert angenommen werden kann.

Wir mussten also überprüfen, ob unser Modell tatsächlich auch auf reale Flaschen zutrifft.

Hierzu haben wir ein einfaches Experiment durchgeführt:

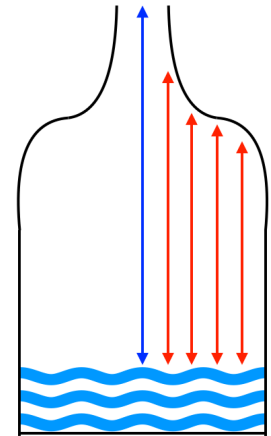


Abbildung 11: War die Modellannahme eine unzulässige Vereinfachung?

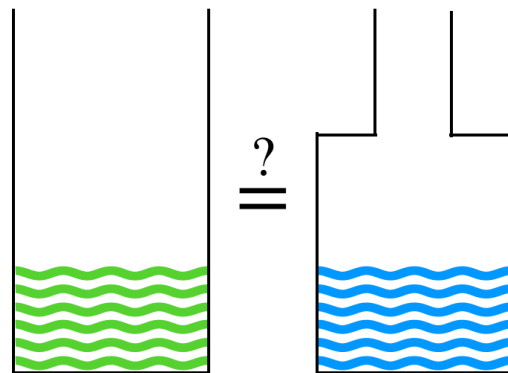


Abbildung 12: Annäherung vom Modell an eine reale Flasche

Sollte nur der Abstand von Wasseroberfläche zu Flaschenende entscheidend sein, müssten die beiden Behälter in Abb. 12 die selben Frequenzen verstärken.

3.1 Messaufbau (2)

Hierzu haben wir einen etwas anderen Messaufbau als in 1.4 beschrieben, konstruiert, welcher in der Lage ist, die Wasserhöhe innerhalb des Behälters konstant zu halten.

Hier findet das PASCAL'sche Gesetz Anwendung.

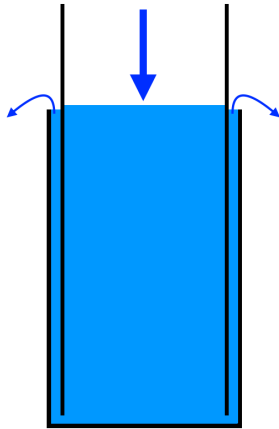


Abbildung 13: Schematische Abbildung des 2. Messaufbaus

Da genau so viel Wasser in den Behälter hinein wie hinaus fließt, bleibt die Wasserhöhe h_W innerhalb des Behälters konstant und somit auch die Länge der Luftsäule h_L . Für die Messung die wir anstreben, war keine Veränderung der Töne wichtig, nur eine Momentaufnahme. Da wir diese nun unbegrenzt in die Länge ziehen können, steigt die Präzision unserer Fourier-Analysen. Der Aufbau ist dazu noch modular, und zwischen den beiden zu untersuchenden Behältern kann schnell gewechselt werden.

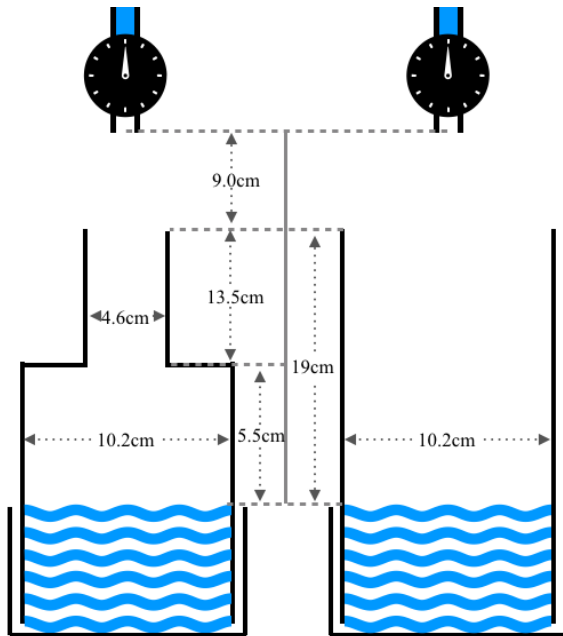


Abbildung 14: Dimensionen des Versuchsaufbaus

Wir haben aus Zeitgründen leider nicht noch mehr Behälter vergleichen können.

3.2 Messdaten

Aus den Daten geht hervor, dass die beiden Experimente nicht die selben Frequenzen verstärken.

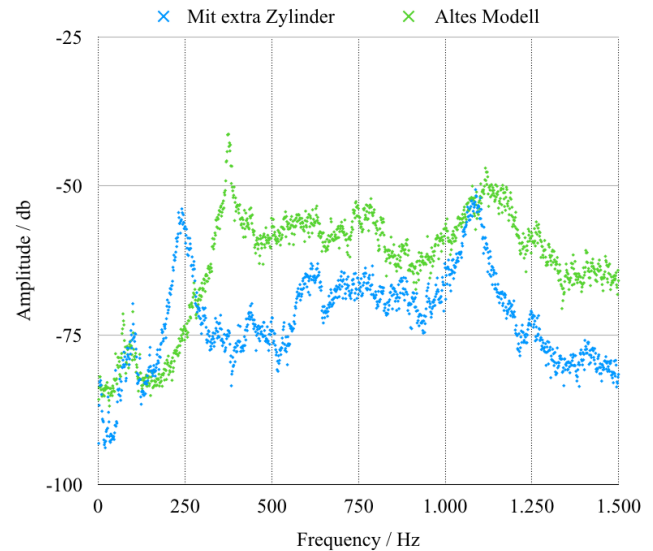


Abbildung 15: Fourier-Analysen der beiden Versuchsaufbauten

Wie in Abschnitt 2.3.3 gezeigt, sind die niedrigsten Frequenzen die signifikantesten, weswegen hier nur die Frequenzen von 0 Hz bis 1500 Hz betrachtet werden.

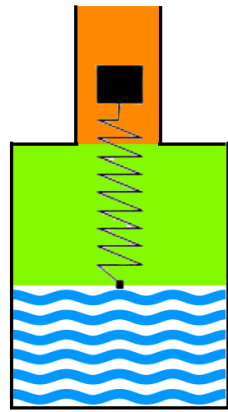
Der „blaue“ Aufbau erzeugt besonders in den tieferen Frequenzen deutlich andere Peaks als der „grüne“, jedoch weisen die beiden Punktwolken bei ca. 1100 Hz einen gemeinsamen Peak auf.

3.3 Modellerweiterung: Helmholtz-Resonator

Der einer Flasche schon näher liegende Aufbau mit dem Extra-Zylinder ist ein HELMHOLTZ-Resonator. Das 1859 entwickelte Modell [8] nimmt an, dass die sich im Flaschenhals befindliche Luft, durch die kompressible Luft im Bauch der Flasche, im Hals mit einer bestimmten Frequenz f_H oszilliert.

$$f_{H_n} = \frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A_{\text{Öffnung}}}{V_{\text{Luft}} \cdot l_{\text{Hals}}}} \cdot (2n + 1) \quad (5)$$

Hierbei stellt n den n -ten Oberton, $A_{\text{Öffnung}}$ die Fläche der Flaschenöffnung, V_{Luft} das Luftvolumen im Flaschenbauch und l_{Hals} die Länge des Flaschenhalses dar.
 Für unseren Aufbau sind f_H und die Obertöne berechenbar:



$$f_{H_0} \approx 26.8 Hz$$

$$f_{H_1} \approx 3 \cdot f_{H_0} = 80.4 Hz$$

$$f_{H_2} \approx 5 \cdot f_{H_0} = 134.0 Hz$$

$$f_{H_3} \approx 7 \cdot f_{H_0} = 187.6 Hz$$

$$f_{H_4} \approx 9 \cdot f_{H_0} = 241.2 Hz$$

Abbildung 16: Schematische Skizze der Modellannahme

Im niedrigen Frequenzbereich zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Der 1. und der 4. Oberton werden verstärkt.

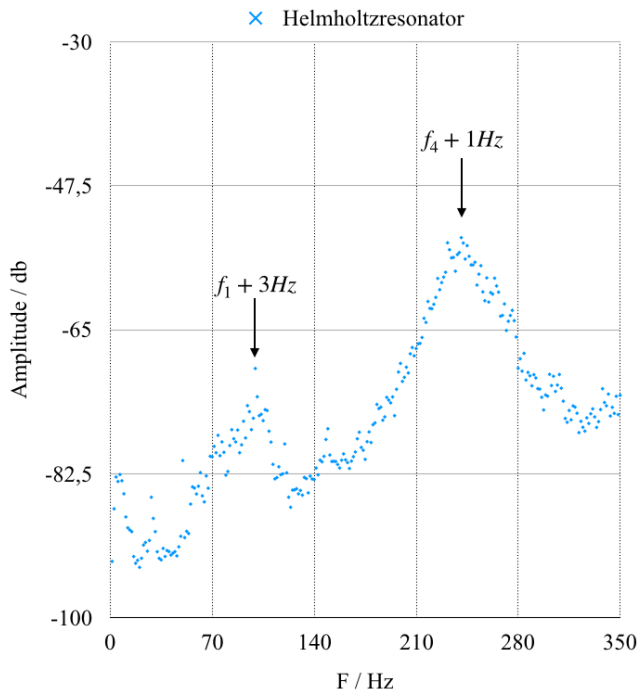


Abbildung 17: Fourier-Analyse im Bereich $0 Hz$ bis $350 Hz$

Das Modell des Helmholtz-Resonators ist also hier gültig.

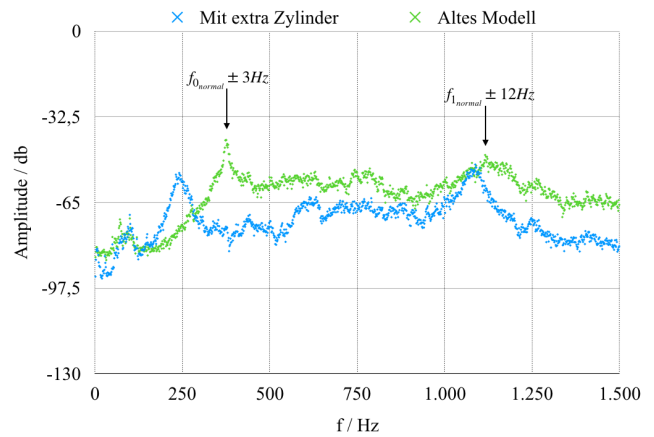


Abbildung 18: Vergleich der beiden Behälter, Markiert sind die nach Abschnitt 2.1 berechneten Frequenzen

Vergleicht man die eben angesprochenen Peaks bei ca. $1100 Hz$, so fällt auf, dass das in Abschnitt 2 entwickelte Modell hier noch zutrifft. Der gemeinsame Peak wird durch den 1. Oberton beschrieben.

3.4 Grenze zwischen Flaschenbauch und -hals

Um das Modell anwenden zu können, ist es wichtig, die Grenze zwischen Flaschenhals und -bauch klar ziehen zu können. In unserem Fall war dies einfach, da die beiden Bestandteile deutlich voneinander getrennt waren. Bei einer komplizierteren Flasche ist dies jedoch oft nicht ganz so trivial. Als Grenzhöhe wird deshalb verallgemeinert die erste Stelle angenommen, an der die Flaschenwände parallel sind.

4 Zusammenfassung

Zusätzlich zu Abschnitt 2.4 muss also gesagt werden, dass nicht nur die Länge der Luftsäule für die Berechnung der verstärkten Frequenzen entscheidend ist, sondern auch die Flaschenform und die ggf. zu berechnende Helmholtz-Resonanzfrequenz f_H . Für jede Flaschenform ist so der exakte Frequenzverlauf vorhersagbar.

5 Nachwort

Dieses Portfolio stellt die Arbeitsabläufe, Tätigkeiten, Überlegungen und Erkenntnisse in chronologischer Reihenfolge dar. Es wurde weitestgehend auf das hinzufügen von Wochentagen und Daten verzichtet, da diese in meinen Augen keinen nennenswerten Erkenntnisgewinn darstellen. Sollte es Ihnen an mehr Überlegungen und Rückschlägen gefehlt haben, so kann ich Ihnen versichern, dass davon in diesem Projekt überraschend wenige vorkamen. Auf ein Experiment folgte ein direkter Erkenntnisgewinn, woraus sich alle weiteren Überlegungen ergaben.

Literatur

- [1] Unknown Author MIT. Lecture 5. Abrufbar unter <http://web.mit.edu/1.63/www/Lec-notes/Surfacetension/Lecture5.pdf>.
- [2] Jesse Belden, Sai Ravela, Tadd Truscott, and Alexandra Techet. Three-dimensional bubble field resolution using synthetic aperture imaging: Application to a plunging jet. *Experiments in Fluids*, 53, 09 2012.
- [3] GYPT. Aufgaben 2019. Abrufbar unter: <https://www.gypt.org/aufgaben.html>.
- [4] M. Minnaert Sc.D. Xvi. on musical air-bubbles and the sounds of running water. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 16(104):235–248, 1933.
- [5] Anton Schaedla Timo Huber. Die Untersuchung des Magnus-Effekts und Bau eines Flettner-Flugzeugs. May 2018.
- [6] Kees van den Doel. Physically based models for liquid sounds. Proceedings of ICAD 04-Tenth Meeting of the International Conference on Auditory Display(Sydney, Australia). July 6-9, 2004.
- [7] Veritasium. Hydrodynamic Levitation. Abrufbar unter: <https://www.youtube.com/watch?v=mNHp8iyyIjo>.
- [8] Wikipedia. Helmholtz-Resonator. Abrufbar unter: <https://de.wikipedia.org/wiki/Helmholtz-Resonator> zuletzt bearbeitet: 21. Januar 2018, 09:48.
- [9] Wikipedia. Isentropenexponent. Abrufbar unter: <https://de.wikipedia.org/wiki/Isentropenexponent> zuletzt bearbeitet: 22. März 2019, 11:26.